Всесибирская открытая олимпиада школьников
2025-2026 г.г. по математике
Заключительный этап. 8 класс
Решения

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

8.1. У Антона дома живут четыре кота: Борис, Виталий, Геннадий и Дмитрий. Известно, что Виталий весит больше Бориса и Геннадия вместе взятых. Кроме того, Виталий с Борисом вместе весят столько же, сколько Геннадий и Дмитрий вдвоём, но Дмитрий с Борисом вместе весят больше Виталия и Геннадия вместе взятых. Определите, в каком порядке могут быть расположены все коты по весу.

Ответ: Дмитрий $>$ Виталий $>$ Борис $>$ Геннадий.

Решение. Будем обозначать котов первыми буквами их имён. Из первого условия видно, что В весит и больше Б, и больше Г. Второе и третье взвешивания записываются как $В + Б = Г + Д$ и $Д + Б > Г + В$. Это значит, что после обмена В и Д местами стала перевешивать группа с Д, откуда следует, что Д тяжелее В. Значит, Д самый тяжёлый.

Ясно, что разбить 4 котов на две группы равного веса можно только если в одной группе находятся самый тяжёлый и самый лёгкий коты, а во второй — два остальных. Из этого следует, что самым лёгким котом является Геннадий. Вспомнив из первого условия, что $В > Б$, получаем, что $Д > В > Б > Г$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только ответ с примерами весов, как описанная ситуация возможна — 1 балл. Этот балл не может суммироваться с остальными
Доказано, что Дмитрий самый тяжёлый — 2 балла.
Доказано, что Геннадий самый лёгкий — ещё 2 балла.

8.2. В клетки таблицы 10×10 расставили все натуральные числа от 1 до 100. Петя записал себе в тетрадку 10 чисел: произведение всех чисел из первой строки, произведение всех чисел из второй, и так далее. Вася аналогично записал себе 10 произведений чисел по столбцам. Может ли оказаться, что какое-то из чисел Пети делится на каждое из чисел Васи?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что это возможно, и петино число X (пусть оно, без ограничения общности, равно произведению чисел в первой строке).

Рассмотрим одиннадцать простых чисел 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47. Они все стоят в некоторых столбцах, и поэтому X, в частности, делится на каждое из них. Но X равен произведению десяти чисел из первой строки, и поэтому для делимости на каждое из этих простых требуется, чтобы на него делилось хотя бы одно число из этих десяти. Простых чисел 11, поэтому по принципу Дирихле найдётся такое число в первой строке, что оно делится сразу на два выбранных простых. Но тогда оно не меньше их произведения, что больше 100. Противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только рассмотрения частных случаев — 0 баллов.
В верном решении без доказательства утверждается, что от 11 до 100 найдётся десять различных простых — снимается 1 балл.

8.3. В одной из клеток поля 3×5 зарыт клад. Разрешается выбрать несколько прямоугольников, у которых стороны идут по линиям сетки поля, и накрыть каждый из них своим детектором (они могут касаться и даже пересекаться). После того, как все детекторы будут выложены, их можно одновременно включить. После включения каждый детектор будет показывать, находится ли клад в одной из клеток под ним. Какое минимальное количество детекторов понадобится, чтобы однозначно установить, в какой клетке зарыт клад?

Ответ: 5.

Решение. Покажем сначала, что пяти детекторов хватит. Поставим первый из них на верхний прямоугольник 2×5, а второй — на нижний 2×5. Если только первый детектор покажет, что под ним зарыт клад, то клад находится в первой строке; если оба, — то во второй; если только второй, — то в третьей.

Аналогично расположим три детектора в левом квадрате 3×3, центральном и правом. Если показывать будет только левый детектор, то клад находится в первом столбце; если левый и средний, — то во втором; если все три, — то в третьем; если средний и правый, — то в четвёртом; если только правый, — то в пятом.

Знаая строку и столбец, клетка с кладом определяется однозначно, поэтому пяти детекторов действительно хватит. Покажем теперь, что меньшего количества недостаточно.

Пронумеруем наши детекторы, и будем считать, что результат их включения — это последовательность из нулей и единиц, где 0 означает, что соответствующий детектор не указал на клад, а 1, что указал. Если детекторов n, то всего есть 2^n возможных последовательностей, поэтому при $n \leqslant 3$ результатов максимум 8, и различить 15 клеток никак не получится (ведь по последовательности мы должны уметь однозначно определять клетку). Значит, $n \geqslant 4$.

Пусть теперь $n = 4$. Есть два варианта.

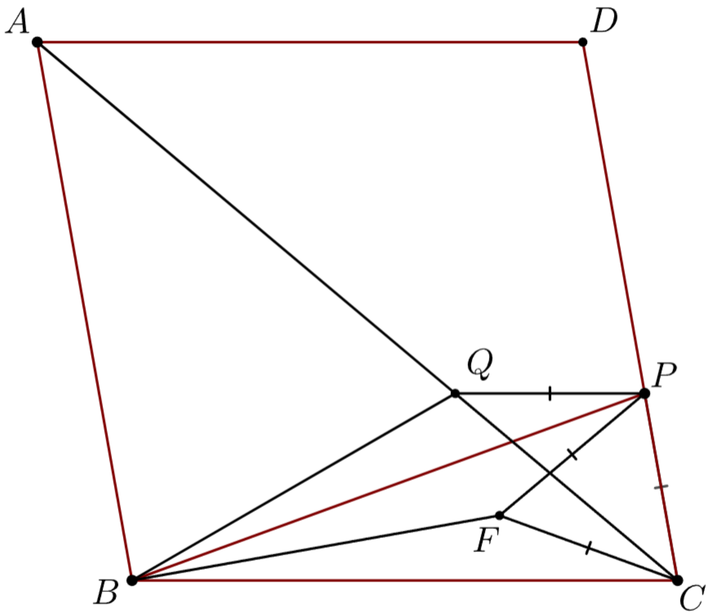
Вариант 1. Все детекторы имеют площадь 8. Значит, они представляют собой прямоугольники 2×4. Для такого детектора есть всего 4 варианта расположения, и ясно, что детекторы не должны совпадать. Но тогда они занимают все 4 угла поля, и невозможно определить, в какой конкретно клетке находится клад, если он закопан в трёх центральных клетках всего прямоугольника 3×5.

Вариант 2. Без ограничения общности первый детектор имеет площадь S, не равную 8. Ясно, что $S \neq 7$. Если $S \geqslant 9$, то будем считать, что клад закопан именно под этим детектором. Если $S \leqslant 6$, то будем считать, что клад закопан не под ним. В любом случае, остаётся хотя бы 9 клеток, которые нужно различить тремя оставшимися детекторами. Это невозможно в силу вышеприведённых рассуждений (можно различить максимум $2^3 = 8$ клеток). Полученное противоречие заканчивает доказательство.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Верный пример на 5 детекторов — 1 балл.
Обоснование работы верного примера на 5 детекторов — 1 балл.
Только доказательство, что детекторов хотя бы 4 — 1 балл.
Рассмотрение варианта 1 — 2 балла.
Рассмотрение варианта 2 — 2 балла.
Все эти баллы суммируются.

8.4. Дан ромб $ABCD$, в котором $\angle ABC = 100^\circ$. Точка P выбрана на отрезке CD таким образом, что $\angle PBC = 20^\circ$. Точка Q на диагонали AC такова, что $QP \parallel AD$. Докажите, что $BP = AQ$.

Решение. Сразу заметим, что $\angle PBC = 20^\circ$, $\angle BCP = 80^\circ$, и поэтому в треугольнике BPC третий угол $\angle BPC = 80^\circ$, то есть он равнобедренный, и $BP = BC$.



Диагонали ромба являются биссектрисами, поэтому $\angle PCQ = 40°$, а из параллельности $QP \parallel CB$ следует равенство накрест лежащих углов $\angle PQC = \angle QCB = 40°$. Значит, треугольник QPC равнобедренный с $QP = PC$.

Отметим внутри BPC такую точку F, что $\angle FPC = \angle FCP = 60°$, то есть треугольник PFC равносторонний. Заметим, что треугольники BFP и BFC равны по трём сторонам, откуда $\angle PBF = \angle CBF = 10°$.

Далее, $\angle QPB = \angle PBC = 20°$, $\angle BPF = \angle BPC - \angle FPC = 20°$, $QP = PC = PF$, поэтому равны треугольники BQP и BFP. Из этого следует, что $\angle QBP = \angle PBF = \angle FBC = 10°$.

Наконец, в треугольнике ABQ имеем $\angle BAQ = 40°$, $\angle ABQ = 100° - \angle QBC = 30°$, откуда $\angle AQB = 70°$, и этот треугольник равнобедренный, то есть $AQ = AB = BC = BP$.

Критерии. Доказано, что $BP = BC$ — 1 балл.
Доказано, что $QP = PC$ — 1 балл.
Отмечена точка F — 2 балла.
Эти баллы суммируются.

8.5. В некотором классе учатся n школьников, каждая пара из которых либо дружит, либо враждует. Известно, что $12 \leqslant n \leqslant 28$. Кроме того, у любой пары врагов есть ровно два общих друга, а у любой пары друзей общих друзей нет вовсе. Чему может быть равно n?

Ответ: только $n = 16$.

Решение. Зафиксируем произвольного человека X. Пусть он дружит с людьми $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и враждует с людьми $B_1, B_2, \ldots, B_k$ (то есть всего людей $n = 1 + m + k$). Назовём эти множества A и B и сразу заметим, что $m \geqslant 2$, так как либо X дружит со всеми, либо с кем-то враждует и по условию имеет хотя бы двух друзей.

Рассмотрим произвольную пару A_iA_j. Эти два человека не могут дружить, так как они имеют общего друга в лице X. Следовательно, они враждуют, и поэтому имеют ровно одного общего друга в B (общий друг в A давал бы такое же противоречие). Значит, каждой паре людей A_iA_j можно сопоставить одного человека из B, который является их общим другом. Покажем, что разным парам из A сопоставляются разные люди из B. Пусть какой-то человек B_s является общим другом как пары A_iA_j, так и пары A_pA_q (пары могут и пересекаться, но здесь хотя бы три разных человека из A). Тогда B_s и X враждуют и при этом имеют хотя бы трёх разных друзей, что противоречит условию. Значит, людей в B хотя бы столько же, сколько пар людей в A, откуда $k \geqslant \frac{m(m-1)}{2}$.

С другой стороны, у каждого человека B_s есть пара людей из A, которые с ним дружат, так как B_s и X враждуют, а общих друзей в B иметь не могут. Из этого следует, что $k = \frac{m(m-1)}{2}$.

Итого, суммарно людей

$$12 \leqslant 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} \leqslant 28,$$

откуда $5 \leqslant m \leqslant 6$, то есть $n = 16$ или $n = 22$. Покажем, что второй вариант невозможен, откуда и будет следовать, что ответом является $n = 16$.

Предположим, $m = 6$ и $n = 22$. Ясно, что в качестве X можно взять любого человека, так что каждый дружит ровно с 6 людьми, а враждует ровно с 15. Снова зафиксируем произвольного X и обозначим через C_{ij} общего друга людей A_i и A_j. Рассмотрим C_{12}. Этот человек дружит с A_1 и A_2, а ещё четыре его друга находятся в множестве B. Конкретно, они могут быть только среди шести человек C_{34}, C_{35}, C_{36}, C_{45}, C_{46} и C_{56}, ведь, например, C_{12} и C_{13} иначе бы дружили и имели общего друга A_1, что противоречит условию.

Без ограничения общности, C_{12} враждует с C_{34}. Но тогда они должны иметь двух общих друзей, а таковой может быть только один — это C_{56}. Полученное противоречие заканчивает решение задачи.

Замечание. Описанная ситуация для $n = 16$ возможна. Для этого достаточно выбрать X, подружить X с $A_1, \ldots, A_5$, для каждой пары A_iA_j выбрать общего друга C_{ij}, а C_{ij} и C_{st} подружить тогда и только тогда, когда все 4 числа i, j, s, t различны.

Критерии. Доказано, что либо $n = 16$, либо $n = 22$ — 4 балла.
За отсутствие примера для $n = 16$ балл не снижается.
Нет доказательства того, что $n = 22$ невозможно, но есть пример для $n = 16$ — 1 балл.